Étude de la deuxième loi de Kepler – Corrigé

1. D'après la deuxième loi de Kepler, les aires balayées par une planète en des durées égales sont égales. Or l'aire balayée par une planète en une durée donnée est proportionnelle à la distance au Soleil et à la distance parcourue sur son orbite.
Par conséquent, plus une planète est proche du Soleil, plus la distance parcourue sur son orbite doit être grande. Le schéma b est donc faux.
Par ailleurs, pour parcourir une distance plus grande en une même durée, il faut que la vitesse de déplacement soit plus importante. Par conséquent, plus une planète est proche du Soleil, plus sa vitesse de déplacement doit être grande. Cela permet de trancher en faveur du schéma a, qui est correct, par rapport au schéma c, qui est faux.

2. $\mathcal{A} = \frac{R\times(v\times\Delta t)}{2}$

3. En A : $\mathcal{A}_{T,A} = \frac{R_{T,A}\times(v_{T,A}\times\Delta t)}{2} = \frac{152.10^6\times 29{,}3\times 1{,}0}{2} = 2{,}2.10^9\ km^2$

En P : $\mathcal{A}_{T,P} = \frac{R_{T,P}\times(v_{T,P}\times\Delta t)}{2} = \frac{147.10^6\times 29{,}8\times 1{,}0}{2} = 2{,}2.10^9\ km^2$

On vérifie bien la seconde loi de Kepler.

4. $\mathcal{A}_{M,m} = \frac{R_{M,m}\times(v_{M,m}\times\Delta t)}{2} = \frac{228.10^6\times 24{,}1\times 1{,}0}{2} = 2{,}8.10^9\ km^2 \neq \mathcal{A}_T$

L'aire balayée durant 1 s est donc différente pour la Terre et pour Mars.

5.

- Système : planète (m)
- Référentiel héliocentrique supposé galiléen
- On se place dans le repère de Frenet
  - $\vec{v}\begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}$
  - $\vec{a}\begin{pmatrix} \frac{dv}{dt} \\ \frac{v^2}{R} \end{pmatrix}$
- Bilan des forces :
  - Force gravitationnelle $\overrightarrow{F_G}\begin{pmatrix} 0 \\ G\frac{M_S m}{R^2} \end{pmatrix}$

En appliquant le principe fondamental de la dynamique, on a :

$$\overrightarrow{F_G} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{1}{m}\overrightarrow{F_G} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{dv}{dt} \\ \frac{v^2}{R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ G\frac{M_S}{R^2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dv}{dt} = 0 & (1) \\ \frac{v^2}{R} = G\frac{M_S}{R^2} & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow v^2 = G\frac{M_S}{R} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM_S}{R}}$$

6. $\mathcal{A} = \frac{R\times(v\times\Delta t)}{2} = \frac{R\times\sqrt{\frac{GM_S}{R}}\times\Delta t}{2} = \frac{\sqrt{R^2\frac{GM_S}{R}}\times\Delta t}{2} = \frac{\sqrt{RGM_S}\times\Delta t}{2} = \frac{\sqrt{GM_S}\times\Delta t}{2}\times\sqrt{R}$

7. D'après l'expression établie à la question précédente, l'aire est proportionnelle à la racine carré du rayon. Le graphique donnant l'aire en fonction de la racine carré du rayon doit donc présenter une courbe de tendance linéaire, ce qui est le cas de la proposition a.